Ce.R.P. del Norte — Examen de Geometría y Álgebra lineal

26 de setiembre de 2023

Justificar todas las respuestas

Reglamentados: elegir 2 actividades

Libres: desarrollar las 3 actividades

Actividad 1

1. En el sistema de coordenadas habitual se consideran los puntos $P_1=(1;0;2)$, $P_2=(0;3;-3)$, $P_3=(1;1;0)$ y $Q=(3;-2;k)$.
   a. Mostrar que los puntos P_1 , P_2 y P_3 no están alineados y hallar las ecuaciones vectorial y cartesiana del plano que determinan ($\wp$).
   b. Determinar el valor de *k* sabiendo que la recta P_1Q (*r*) está incluida en $\wp$.
   c. Calcular la distancia de P_2 a *r*.
2. Sabiendo que $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^n$ es L.I., investigar si $\{u, v+w, u+v+w\}$ también lo es.
3. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ -x + y + z = 0\}$. Hallar dos conjuntos distintos que sean generadores de S.

Actividad 2

1. Sean $U = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\a\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\b\\-1\end{pmatrix}\right\}$ y $z = \begin{pmatrix}1\\-a\\-3\end{pmatrix}$. Investigar si $z \in [U]$; discutir según los valores de los reales *a* y *b*.
2. Se dan: $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $u \in \mathbb{R}^n$ fijo y $S = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax =< x, u >. u\}$
   a. Demostrar que S es subesapacio de $\mathbb{R}^n$.
   b. Si $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\2 & 1 & 2\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; hallar una base para S y hallar $S^{\perp}$.
3. Una matriz cuadrada A se dice idempotente cuando $A=A^2$. Si A es idempotente probar que:
   a. Los únicos valores propios posibles de A son 0 y 1.
   b. Av y $v - Av$ son vectores propios de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ para cualquier $v \in \mathbb{R}^n$ no nulo.
   c. A es diagonalizable.

Actividad 3

1. Se considera T un operador lineal de $\mathbb{R}^3$definido por $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\-1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$
   a. Mostrar que $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ está en el núcleo y en imagen de T.
   b. ¿T es biyectiva?
   c. ¿T tiene vectores y valores propios? ¿es diagonalizable?
2. Estudiar la sección cónica $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$