Ce.R.P. del Norte
11 de diciembre de 2023
Justificar todas las respuestas

Examen de Geometría y Álgebra lineal

Reglamentados: elegir 2 actividades
Libres: desarrollar las 3 actividades

Actividad 1

A. Se consideran los planos π_1, π_2 y la recta *r* definidos de la siguiente forma:
$\pi_1: (x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(-1,1,0) + \mu(1,2,2)$ $\quad \pi_2: 2x + y - z = 1$ $\quad r: (x,y,z) = (1,0,0) + t(-1,2,0)$
Verificar que $\pi_1 \cap \pi_2$ es una recta que se cruza con *r* y hallar la distancia entre ellas.

B. Sea S un subespacio de un espacio vectorial V y $D = \{v_1, v_2, v_3\}$ una de sus bases.
Sean $F = \{v_1 + v_2\ ,\ v_2 + v_3\ , v_3 + v_1\}$ y $G = \{v_1 - v_2\ ,\ v_2 - v_3\ , v_3 - v_1\}$
Analizar los conjuntos F y G:
   i. ¿son bases o generadores de S?, ¿son L.I. o L.D.?;
   ii. ¿cuál es la dimensión de los subespacios que ellos generan?

C. Sean los subespacios S_1 y S_2 de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$:
$S_1 = \{M_1 \in \mathcal{M}_{2\times2}; M_1$ es antisimétrica$\}$ y $S_2 = \{M_2 \in \mathcal{M}_{2\times2}; traza(M_2) = 0\}$; ¿$\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) = S_1 \oplus S_2$?

Actividad 2

A. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$.
   i. Hallar $\alpha \in \mathbb{Z}$ para que 6 sea un valor propio de M y probar que la matriz es diagonalizable.
   ii. Hallar la matriz $P \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$, ortogonal tal que $P^{-1}MP$ es diagonal.
   iii. Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el operador lineal que tiene a P como matriz asociada en las bases canónicas. Probar que T es O.O.; clasificar y dar elementos.

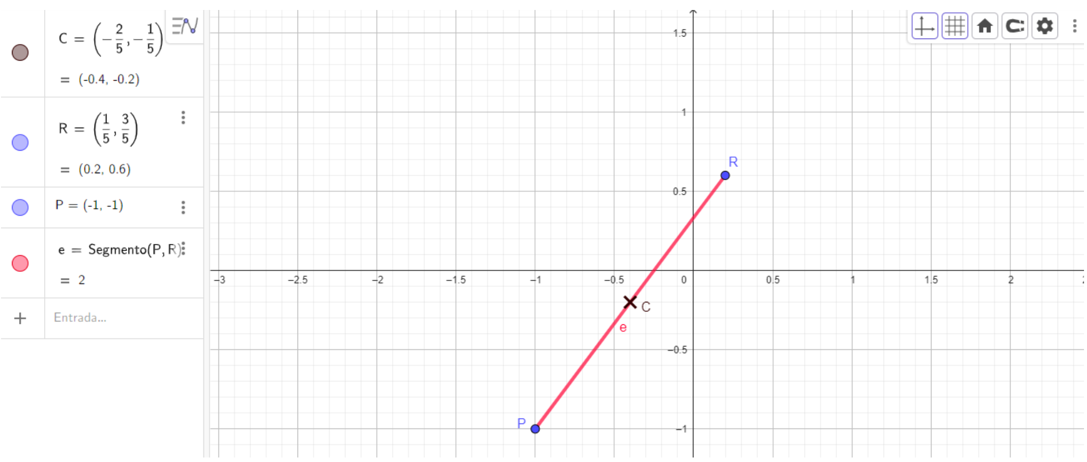
B. Se consideran las matrices M, invertibles de orden n. Siendo $S = M^{-1}$ y $T = M.M^t$, justificar que T es invertible, dar una expresión para T^{-1} y deducir el determinante de T en función del determinante de M.

Actividad 3

($\wp_2$ denota el conjunto de polinomios de grado menor o igual que 2 de variable real x)

A. Sean $T: \wp_2 \to \mathbb{R}^3$ y $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dos transformaciones lineales definidas de la siguiente forma:
   - $T(1) = (2;1;-1)$ $\qquad T(x) = (-1;-1;0)$ $\qquad T(x^2) = (1;0;0)$
   - $S(x,y,z) = (x+y+z; x-y+z; x+z; x+3y+z)$
   i. Sea $p \in N(S \circ T)$ tal que $p(1) = -2$; hallar $p(0)$.
   ii. Sea $v = (-1;\alpha;\beta;1)$, α y β reales. Hallar estos reales sabiendo que $v \in Im(S \circ T)$.

B. Dada la ecuación $E: 4x^2 + 24xy + 11y^2 + 8x + 14y + 23 = 0$
   i. Demostrar que E representa una hipérbola cuyo centro es $C = \left(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$.
   ii. Uno de los vértices de la hipérbola es $V_1 = (-2, j)$. Determinar el valor de j y el otro vértice (V_2).
   iii. En la imagen adjunta:
      - ***C***: centro de la hipérbola
      - ***e***: su eje imaginario



¿cómo determinar sus focos geométricamente?